Chapitre IX : Analyse asymptotique

Rédigé par Samy Youssoufine

9 janvier 2026

Note importante

Document WIP. Peut contenir des erreurs/sections incomplètes. Version BETA de la nouvelle mise en forme.

Table des matières

1 Comparaison des suites et fonctions **3**

1.1 Comparaison des suites 3

1.2 Comparaison des fonctions 8

2 Développement limité **10**

2.1 Généralités 10

2.2 Formule de Taylor-Young 12

2.3 Opérations sur les développements limités 15

3 Applications **21**

3.1 Calcul de limites 21

3.2 Recherche des équivalents 22

3.3 Recherche de la dérivabilité et de la position relative à la tangente 24

3.4 Recherche d'asymptote 25

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'analyse asymptotique des fonctions et des suites. Les objectifs principaux sont de :

- Étudier les comportements asymptotiques des suites et des fonctions.
- Présenter des outils d'analyse asymptotique, en particulier **le développement limité**.

1 Comparaison des suites et fonctions

1.1 Comparaison des suites

Définition 1.1.1.1 ***(Négligence, domination et équivalence de suites)***

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- (U_n) est **négligeable** devant (V_n) lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n| \leq \varepsilon |V_n|$. On note alors $U_n = o(V_n)$ ou $U_n \underset{n\to+\infty}{=} o(V_n)$.
- (U_n) est **dominée** par (V_n) lorsque $\exists M \geq 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n| \leq M |V_n|$. On note alors $U_n = O(V_n)$ ou $U_n \underset{n\to+\infty}{=} O(V_n)$.
- (U_n) est **équivalente** à (V_n) lorsque $U_n - V_n = o(V_n)$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - V_n| \leq \varepsilon |V_n|$. On note alors $U_n \sim V_n$ ou $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} V_n$.

Remarque 1.1.1.1

Il faut faire très attention à l'écriture manuscrite de $o(V_n)$, pour éviter de la confondre avec d'autres notations. Il faut, dans l'idéal, qu'elle soit de la même taille/hauteur que le signe égal $(=)$.

Propriété 1.1.1.1

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est négligeable devant (V_n), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$.

  Donc $\boxed{U_n = o(V_n) \iff \dfrac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est dominée par (V_n), alors la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bornée.

  Donc $\boxed{U_n = O(V_n) \iff \left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)_n \text{ est bornée}} \in \mathbb{B}(\mathbb{C})$.
- Si (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et que (U_n) est équivalente à

(V_n), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$.

Donc $\boxed{U_n \sim V_n \iff \dfrac{U_n}{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

Exemple 1.1.1.1

1. $\frac{\cos(n)}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\frac{\frac{\cos(n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \cos(n)$ est bornée.
2. $\forall k \geq 1, e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ car $\frac{e^{-n}}{\frac{1}{n^k}} = n^k e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = n\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Les propriétés ci-dessus sont des cas particuliers de la définition, où (V_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. En effet, si (V_n) s'annule infiniment souvent, le quotient $\frac{U_n}{V_n}$ n'est pas forcément défini pour tout n. Maintenant, nous souhaitons généraliser ces propriétés même si (V_n) peut s'annuler à partir d'un certain rang.

Propriété 1.1.1.2 ***(Cas général des propriétés ci-dessus)***

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- $U_n = o(V_n) \iff \exists (\varepsilon_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\varepsilon_n \to 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \varepsilon_n V_n$.
- $U_n = O(V_n) \iff \exists (\beta_n)_n \in \mathbb{B}(\mathbb{C})$ tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \beta_n V_n$.
- $U_n \sim V_n \iff \exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_n \to 1$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \alpha_n V_n$.

Preuve

- **Démonstration de la première équivalence :**
  - Pour démontrer la première équivalence dans le sens indirect, on part du fait que $\varepsilon_n \to 0$. On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$. Donc, pour $n \geq n_0$, on a $|U_n| = |\varepsilon_n|\,|V_n| \leq \varepsilon\,|V_n|$, ce qui prouve que $U_n = o(V_n)$.
  - Pour démontrer la première équivalence dans le sens direct, on part du fait que $U_n = o(V_n)$. Donc, par définition, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |U_n| \leq \varepsilon\,|V_n|$. On peut alors définir la suite $(\varepsilon_n)_n$ de la manière suivante :
    — $\varepsilon_n = \begin{cases} \frac{U_n}{V_n} & \text{si } V_n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
    — Il est clair que $\varepsilon_n \to 0$ car pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\forall n \geq n_1, |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ (il faut étudier les cas où $V_n = 0$ et $V_n \neq 0$).
  - Maintenant, il faut vérifier que $U_n = \varepsilon_n V_n$ à partir d'un certain rang.
  - Si $V_n \neq 0$, on a $U_n = \frac{U_n}{V_n} \cdot V_n = \varepsilon_n V_n$.
  - Si $V_n = 0$, alors $\forall n \geq n_1, |U_n| \leq 0 \iff U_n = 0 \implies 0 \cdot V_n = \varepsilon_n \cdot V_n$.

■

Définition 1.1.1.2 ***(Relation d'ordre, relation d'équivalence)***

- Une relation binaire sur un ensemble $E \neq \emptyset$ est une partie R de $E \times E$. Si $(x, y) \in R$, on note xRy.
- Une relation R est dite :
  - **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E, xRx$.
  - **symétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, xRy \implies yRx$.
  - **antisymétrique** si et seulement si $\forall x, y \in E, (xRy \text{ et } yRx) \implies x = y$.
  - **transitive** si et seulement si $\forall x, y, z \in E, (xRy \text{ et } yRz) \implies xRz$.
- Une relation R sur E est dite une relation d'ordre si et seulement si R est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Une relation R sur E est dite une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1.1.1.2

- La relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. En effet, elle est réflexive ($\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x$), antisymétrique (si $x \geq y$ et $y \geq x$, alors $x = y$) et transitive (si $x \geq y$ et $y \geq z$, alors $x \geq z$).
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\equiv \bmod n$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. En effet, elle est réflexive (pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a \mod n$, sachant que $a - a = 0 \cdot n$, donc $\exists k \in Z, \dots$), symétrique (si $a \equiv b \mod n$, alors $b \equiv a \mod n$) et transitive (si $a \equiv b \mod n$ et $b \equiv c \mod n$, alors $a \equiv c \mod n$).

Propriété 1.1.1.3 ***(Étude des relations o, O et $\sim$)***

- **Étude de la relation o :**
  - La relation o n'est pas reflexive, car $1 \neq o(1)$. Elle est donc ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence.
  - Elle n'est aussi pas symétrique, car $1 = o(n)$ n'implique pas que $n = o(1)$.
  - Par contre, elle est transitive : si $U_n = o(V_n)$ et $V_n = o(W_n)$, alors $U_n = o(W_n)$.
- **Étude de la relation O :**
  - La relation O est réflexive, car $U_n = O(U_n)$ (on prend $M = 1$ depuis la définition).
  - Elle est aussi transitive : si $U_n = O(V_n)$ et $V_n = O(W_n)$, alors $U_n = O(W_n)$.
- **Étude de la relation $\sim$:**
  - La relation $\sim$ est réflexive, car $U_n \sim U_n$ (on prend $\alpha_n = 1$ depuis la définition).
  - Elle est aussi symétrique : si $U_n \sim V_n$, alors $V_n \sim U_n$ (on prend $\alpha'_n = \frac{1}{\alpha_n}$).

▷ Elle est aussi transitive : si $U_n \sim V_n$ et $V_n \sim W_n$, alors $U_n \sim W_n$ (on prend $\alpha''_n = \alpha_n \cdot \alpha'_n$).

▷ Donc, **la relation $\sim$ est une relation d'équivalence**.

Remarque 1.1.1.2

- $U_n = o(V_n) \implies U_n = O(V_n)$.
- $U_n = o(1) \iff U_n \to 0$. $o(1)$ représente les suites qui convergent vers 0. On peut la noter aussi $\varepsilon_n \to 0$.
- $U_n = O(1) \iff (U_n)_n$ est bornée.
- $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}^*$ si et seulement si $U_n \sim l$.
- $O(1) = \alpha_n$ où $(\alpha_n)_n$ est une suite bornée.
- $\begin{cases} o(U_n) = U_n \cdot o(1) \\ O(U_n) = U_n \cdot O(1) \end{cases}$
- $\begin{cases} o(1) \cdot O(1) = o(1) \cdot o(1) = o(1) \\ O(1) \cdot O(1) = O(1) \end{cases}$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \begin{cases} \lambda \cdot o(1) = o(1) \\ \lambda \cdot O(1) = O(1) \end{cases}$
- $o(1) + o(1) = o(1)$ et $O(1) + O(1) = O(1)$.
- $o(1) + O(1) = O(1)$.
- $o(O(U_n)) = O(U_n) \cdot o(1) = U_n \cdot \underbrace{O(1) \cdot o(1)}_{=o(1)} = o(U_n)$.
- $O(o(U_n)) = o(U_n) \cdot O(1) = U_n \cdot \underbrace{o(1) \cdot O(1)}_{=o(1)} = o(U_n)$.

Propriété 1.1.1.4 *(Conservation de la convergence par équivalence)*

Soient $(U_n), (V_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telles que $U_n \sim V_n$.
$(U_n)_n$ est convergente si et seulement si $(V_n)_n$ est convergente.
Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Preuve

On a $U_n \sim V_n \iff \exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $\alpha_n \to 1$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n = \alpha_n V_n$.
Supposons que $(U_n)_n$ est convergente, et soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. On a donc :

$$V_n = \frac{U_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{l}{1} = l.$$

Donc $(V_n)_n$ est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. ■

Propriété 1.1.1.5 ***(Conservation de la divergence vers $\pm\infty$ par équiv.)***

Si $U_n \sim V_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$, alors $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$. (Note : le signe $\pm$ est le même des deux côtés.)

Propriété 1.1.1.6 ***(Produit des équivalences)***

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n, (u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \sim b_n$ et $u_n \sim v_n$. Alors :

- $a_n u_n \sim b_n v_n$.
- Si b_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{u_n}{v_n}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, U_n^k \sim V_n^k$.
- Si $U_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, U_n^\lambda \sim V_n^\lambda$.

Preuve

On sait que $\exists \alpha_n, \beta_n \to 1$ telles que $a_n = \alpha_n b_n$ et $u_n = \beta_n v_n$ à partir d'un certain rang. Donc :

- $a_n u_n = \alpha_n \beta_n b_n v_n$, avec $\alpha_n \beta_n \to 1$, donc $a_n u_n \sim b_n v_n$.
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, b_n \neq 0$. Donc, pour $n \geq n_0$, on a $\frac{a_n}{b_n} = \alpha_n$ et $\frac{u_n}{v_n} = \beta_n$. Donc, $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{u_n}{v_n}$.
- La démonstration des autres propriétés est similaire.

■

Remarque 1.1.1.3

1. En général, $U_n \sim V_n$ n'implique pas $\not\Rightarrow$ $f(U_n) \sim f(V_n)$. Par exemple, $e^{U_n} \sim e^{V_n}$ n'est vrai que si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$.
2. $U_n \sim V_n \quad \underbrace{\not\Rightarrow}_{\text{n'implique pas !}} \quad U_n - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. On ne peut pas toujours additionner des équivalences. Par exemple, si $U_n = n + 1 + \frac{1}{n}$ et $V_n = n$, on a $U_n \sim V_n$ et $U_n - 1 \sim V_n - 1$, mais $U_n + (U_n - 1) \not\sim V_n + (V_n - 1)$.
   En général : $\boxed{U_n \sim V_n \text{ et } A_n \sim B_n \quad \underbrace{\not\Rightarrow}_{\text{n'implique pas !}} \quad U_n + A_n \sim V_n + B_n}$.
4. $U_n \sim 0 \iff U_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Exercice 1.1.1.1

1. Soient $(U_n)_n, (V_n)_n \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ telles que $U_n \sim V_n$. **Pour quelle(s) condition(s) aura-t-on** $\ln(U_n) \sim \ln(V_n)$ **?**
2. *(Équivalent de l'intégrale de Wallis)* On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ (Intégration par parties).
   b) Montrer que la suite $(n \cdot I_n \cdot I_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \sim I_{n-1}$.
   d) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   e) Calculer I_{2n} et donner un équivalent de C_{2n}^n.
   f) On pose $U_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. On admet que $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ pour un certain $l \in \mathbb{R}^*$.
   Montrer que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (c'est la formule de Stirling).

1.2 Comparaison des fonctions

Définition 1.1.2.3

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$.

1. On dit que f est **négligeable** devant g en $x_0 \in I$ si et seulement si $\exists V \in V(x_0), \exists \varepsilon : V \to \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x \in V, f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. On note alors $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$.
2. f est dominée par g en $x_0 \in I$ si et seulement si $\exists V \in V(x_0), \exists M : V \to \mathbb{C}, \forall x \in V, f(x) = M(x)g(x)$. On note alors $f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x))$.
3. f est équivalente à g en $x_0 \in I$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$, i.e. $\exists V \in V(x_0), \exists \alpha : V \to \mathbb{C}$ tel que $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$ et $\forall x \in V, f(x) = \alpha(x)g(x)$. On note alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Remarque 1.1.2.4

- Si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, alors :
  - $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  - $f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(g(x)) \iff \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{x \in V}$ est bornée sur un voisinage V de x_0.
  - $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$, les mêmes propriétés sont valables en remplaçant

$\lim_{x\to x_0}$ par $\lim_{x\to+\infty}$ ou $\lim_{x\to-\infty}$.

- Les propriétés analogues à celles des suites sont valables pour les fonctions.

Exemple 1.1.2.3

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
2. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_0 x^0 = a_0$ si $a_0 \neq 0$.
3. $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$.
4. $\forall k \in \mathbb{N}^*, e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

2 Développement limité

2.1 Généralités

Définition 2.2.1.4

Soient $f \in \mathbb{K}^I$ et $x_0 \in \overline{I}$.

- On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de x_0, qu'on notera $\mathbf{DL}_n(x_0)$, lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $f(x) = P(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$
  C'est-à-dire que :$\exists a_0, a_{,} \dots, a_n \in \mathbb{K}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$.
- Supposons que $+\infty$ est une extrémité de I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$, qu'on notera $\mathbf{DL}_n(+\infty)$, lorsque la fonction $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0^+.
  C'est-à-dire que : $\exists P \in \mathbb{K}_n[X], f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$.
  Ce qui équivaut aussi à écrire $\exists P \in \mathbb{K}_n[X], f(\frac{1}{t}) = P(t) + \underset{t \to 0}{(t^n)}$.
  On appelle aussi ce type de développement un **développement asymptotique**.

Exemple 2.2.1.4

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Démonstration rapide : On a $\frac{1}{1-x} = \underbrace{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}_{=\sum_{k=0}^{n} x^k} + \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{n+1}}{x^n(1-x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Donc, $\frac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.

Propriété 2.2.1.7

Soient $f \in \mathbb{K}^I, x_0 \in \overline{I}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(x_0)$, alors le polynôme P de degré au plus n est unique, i.e.

$\exists ! P \in \mathbb{K}_n[X], f(x) = P(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right), \forall x.$
On appelle P la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0.

Preuve

Supposons que $x_0 = 0$ pour simplifier la notation (le raisonnement est similaire pour un x_0 quelconque).
Nous allons raisonner par absurde. Supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n au voisinage de 0, i.e. $\exists P, Q \in \mathbb{K}_n[X], P \neq Q$ tels que :

$$(*) : \begin{cases} f(x) = P(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \\ f(x) = Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \end{cases}$$

On sait que $P \neq Q$, donc $P - Q \neq 0$. On peut donc réecrire l'égalité précédente comme suit :

$$P - Q = \sum_{k=s}^{n} a_k x^k$$

(avec $a_s \neq 0$ et $s \leq n$).
On sait, d'après $(*)$, que :

$$P(x) - Q(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

Or $(P - Q)(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_s x^s$ (car $a_s \neq 0$).
Cela implique que $a_s x^s = \underset{x \to 0}{o}(x^n)$, ce qui est absurde car $s \leq n$.
Conclusion : Le polynôme P est unique. ■

Propriété 2.2.1.8

Soient $f \in \mathbb{K}^{I \setminus \{x_0\}}, x_0 \in \overline{I}$.

1. Si f admet un $\mathbf{DL}_0(x_0)$, alors f est prolongeable par continuité en x_0.
2. Si f admet un $\mathbf{DL}_1(x_0)$, alors f est prolongeable par dérivation en x_0.

Attention

On ne peut pas généraliser cette propriété pour un ordre $n \geq 2$. En effet, le fait que f admette un $\mathbf{DL}_n(x_0)$ n'implique pas que f est n fois prolongeable en une fonction n fois dérivable en x_0.

$$f \text{ admet } \mathbf{DL}_n(x_0) \not\Longrightarrow f \text{ est } n \text{ fois prolongeable en une fct. } n \text{ fois dérivable en } x_0.$$

Contre-exemple :

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
On a f est $\mathcal{C}^1$, et $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (f n'est pas deux fois dérivable en 0).
Cependant, f admet un $\mathbf{DL}_2(0)$ car $f(x) = 0 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

Preuve

1. f admet un $\mathbf{DL}_0(x_0)$, donc $f(x) = \lambda + \underset{x \to x_0}{o}(1)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. Donc, f est prolongeable par continuité en x_0, et $\tilde{f}(x_0) = \lambda$ (si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en x_0).
2. f admet un $\mathbf{DL}_1(x_0)$, donc $f(x) = a(x - x_0) + b + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$ pour certains $a, b \in \mathbb{K}$. Donc, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Donc, f est prolongeable par continuité en x_0, et $\tilde{f}(x_0) = b$ (si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en x_0).
Nous allons montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 et que $\tilde{f}'(x_0) = a$. On a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-b}{x-x_0} = \frac{a(x-x_0)+\underset{x \to x_0}{o}(x-x_0)}{x-x_0} = a + \underset{x \to x_0}{o}(1)$. Donc, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$. Donc, $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 et $\tilde{f}'(x_0) = a$.

■

Propriété 2.2.1.9

Si f admet un $\mathbf{DL}_n(x_0)$, de partie régulière P, alors $\forall k \leq n$, f admet un $\mathbf{DL}_k(x_0)$, de partie régulière la partie de P tronqué à l'ordre k (de degré au plus k).
On va tronquer le polynôme de la manière suivante :
$\sum_{j=0}^n a_j x^j = \sum_{j=0}^k a_j x^j + \sum_{j=k+1}^n a_j x^j = \sum_{j=0}^k a_j x^j + \underbrace{x^{k+1}\left(\sum\limits_{j=k+1}^{n} a_j x^{j-k-1}\right)}_{= \underset{x \to x_0}{o}(x^k)}$.

2.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.2.2.1 *(Formule de Taylor-Young)*

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

On déduit de ce théorème que n'importe quelle fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admet un développement limité à l'ordre n en tout point de son domaine, dont la partie régulière est $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Preuve

On part de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{= \underset{o \to a}{o}((x-a)^n)?}
\end{aligned}$$

Or, on a $\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{(x-a)^n}{n!}$. Donc, on peut écrire :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt.$$

On a $\left|\int_a^x \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right| \leq \sup_{t\in[a,x] \text{ ou } [x,a]} \left|f^{(n)} - f^{(n)}(a)\right| \cdot \frac{|x-a|^n}{n!}$, sachant que f est continue sur $[a,x]$ ou $[x,a]$, donc bornée sur cet intervalle (elle admet donc un majorant).
Nous allons donc montrer que $\lim_{x\to a} \sup_{t\in[a,x] \text{ ou } [x,a]} \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| = 0$.
On sait que $f^{(n)}$ est continue en a.
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall x \in I, |x-a| < \mu \implies \left|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)\right| < \varepsilon$.
Or, on sait que $t \in [a,x]$ ou $[x,a] \implies |t-a| \leq |x-a| \leq \mu$.
Donc $\forall t \in [a,x]$ ou $[x,a]$, $\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| < \varepsilon$.
Donc $\sup_{t\in[a,x] \text{ ou } [x,a]} \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| \leq \varepsilon$.
Donc $\lim_{x\to a} \sup_{t\in[a,x] \text{ ou } [x,a]} \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right| = 0$.
Donc $\int_a^x \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
Conclusion : On a bien $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$. ■

Conséquence 2.2.2.1

1. Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, alors f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ pour tout $a \in I$ car $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=P(x-a), \text{ partie régulière.}} + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
2. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, alors f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ pour tout $a \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.2.2.5

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^{2n})}_{\text{ou } \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})}$.
   Pour démontrer ce résultat, on sépare le développement limité en deux cas : n pair et n impair. On peut aussi ajouter le terme $\underset{x \to 0}{o}(x^{2n})$ dans le cas impair, car le dernier terme impaire de la somme sera nul.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})}_{\text{ou } \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})}$.
   Pour démontrer ce résultat, on sépare le développement limité en deux cas : n pair et n impair. On peut aussi ajouter le terme $\underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$ dans le cas pair, car le dernier terme paire de la somme sera nul.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}^*, \\
&(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \\
&\qquad\quad = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n-1)}{n!} x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)
\end{aligned}$$

5. $\forall x \in]-1, +\infty[, \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$
   $= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$.
6. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
   $= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
   $= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$.
   Il n'y a pas de factorielle dans ce développement limité !
8. $\cosh(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^{2n})}_{\text{ou } \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})}$.
9. $\sinh(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})}_{\text{ou } \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})}$.

Méthode

Il est fortement conseillé d'expliciter la partie régulière des développements limités usuels jusqu'à l'ordre 5 afin de les mémoriser plus facilement.

2.3 Opérations sur les développements limités

Propriété 2.2.3.10

Soient $f, g \in \mathbb{K}, a \in I$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière P, et g admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière Q, alors :

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f + \alpha g$ admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière $P + \alpha Q$.
- fg admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière $P \cdot Q$ tronqué à l'ordre n (sachant qu'il est normalement de degré inférieur ou égal à $2n$).

Preuve

On pose $f(x) = P(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ et $g(x) = Q(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.

1. On a $(f+\alpha g)(x) = (P+\alpha Q)(x-a) + \underbrace{\underset{x\to a}{o}((x-a)^n) + \alpha \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)}_{= \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)}$.

   Donc $f + \alpha g$ admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière $P + \alpha Q$.
2. On a $(f \cdot g)(x) = (P \cdot Q)(x-a) + P(x-a) \cdot \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) + Q(x-a) \cdot \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) \cdot \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$
   Donc $(f \cdot g) = (P \cdot Q)(x-a) + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
   On pose $P \cdot Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k \cdot X^k$.
   Donc $(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$
   Donc $(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + (x-a)^n \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} c_k (x-a)^k - n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
   Or $\lim\limits_{x\to a} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} c_k (x-a)^{\overbrace{k-n}^{\geq 1}} \right) = 0$.
   Alors $(x-a)^n \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} c_k (x-a)^{k-n} = \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
   On en déduit que $(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$.
   Donc fg admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière $P \cdot Q$ tronqué à l'ordre n.

■

Exemple 2.2.3.6

1. Développement limité d'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+x}$.
2. Développement limité d'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+x)^2} - \cos(x)$.

Solution :

- **1er exemple :**
  - On a $f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{1+x}$.

▷ On connaît les développements limités suivants :

— $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

— $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

▷ On calcule le produit :

▷

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \cdot \left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

▷ Donc, le développement limité d'ordre 3 en 0 de f est $f(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

▶ **2ème exemple :**

▷ On a $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2} - \cos(x)$.

▷ On connaît les développements limités suivants :

— $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

— $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

— $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

▷ On calcule le produit et la différence pour enfin trouver le développement limité de f :

▷ $f(x) = -x + 2x^2 - \frac{11}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Propriété 2.2.3.11

Soient $f \in \mathbb{R}^I, g \in \mathbb{K}^J$ tel que $0 \in I, f(0) = 0$ et $f(I) \subset J$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ de partie régulière P, et si g admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ de partie régulière Q, alors la composée $g \circ f$ admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ de partie régulière $Q \circ P$ tronquée à l'ordre n.

Remarque 2.2.3.5 *(Composée et développement limité (cas général))*

Soient $f, g \in \mathbb{K}^I, g \in \mathbb{K}^J, a \in I$ et $f(I) \subset J$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière P, et si g admet un $\mathbf{DL}_n(b)$ de partie régulière Q avec $b = f(a)$, alors la composée $g \circ f$ admet un $\mathbf{DL}_n(a)$.

Preuve

▶ On pose $\begin{cases} f(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ g(x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \end{cases}$

- Comme $f(0) = 0$, on a $P(0) = 0$.
- On pose $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ (car $P(0) = 0$).
- Et on pose $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$.
- On a donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\underbrace{P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0}\right)$.
- Donc $(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right)^k + \underset{x\to 0}{o}\left(\left(P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right)^n\right)$.
- Donc $(g \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot \left(\sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_j^k P(x)^j \cdot \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n(k-j)}\right)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n (P(x))^k \left(\underset{x\to 0}{o}(x^n)\right)^{n-k}\right) \cdot \underset{x\to 0}{o}(1)$.
- On a

■ recop..

Méthode

Généralement, pour calculer le développement limité d'une composée $g \circ f$, on commence par calculer le développement limité de f puis on remplace x par le développement limité de f dans le développement limité de g.

Exemple 2.2.3.7

1. $f : x \mapsto e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$. Développement limité d'ordre 4 en 0.
2. $g : x \mapsto \ln(e^x + \cos(x))$. Développement limité d'ordre 2 en 0.

Solution :

- **1er exemple :**
  - On remarque d'abord que $\cos(0) = 1$. Donc, on va d'abord calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$.
  - On a $f(x) = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$.
  - Donc $f(x) = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$.
  - On calcule le développement limité d'ordre 4 en 0 de $e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$.
  - Après calculs, on obtient : $f(x) = e(x - \frac{2}{3}x^3) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
- **2ème exemple :**
  - Le développement limité d'ordre 2 en 0 de e^x est $1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
  - Le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\cos(x)$ est $1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

- ▷ Donc, le développement limité d'ordre 2 en 0 de $e^x + \cos(x)$ est $2 + x + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.
- ▷ On calcule le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(2 + x + \underset{x \to 0}{o}(x^2))$.
- ▷ Après calculs, on obtient : $g(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.

Propriété 2.2.3.12 ***(Inverse et développement limité)***

Soient $f \in \mathbb{K}^I$ telle que $f(0) \neq 0$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(0)$, alors $\frac{1}{f}$ admet un $\mathbf{DL}_n(0)$.

Preuve

- On a $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)+f(x)-f(0)} = \frac{1}{f(0)} \cdot \frac{1}{1+\frac{f(x)-f(0)}{f(0)}}$.
- On pose $h : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{f(0)}$.
- On pose $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- On a h admet un $\mathbf{DL}_n(0)$, $h(0) = 0$.
- On a g admet un $\mathbf{DL}_n(0)$.
- Donc $\frac{1}{f} = \frac{1}{f(0)} \cdot (g \circ h)$ admet un $\mathbf{DL}_n(0)$.

∎

Exemple 2.2.3.8

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tan.
Solution :
On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On connaît les développements limités suivants :

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.
- $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$ (on utilise la propriété précédente).

Donc, on calcule le produit :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

Donc, le développement limité d'ordre 3 en 0 de tan est $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.

Propriété 2.2.3.13 *(Primitive d'un développement limité)*

Soient $f \in \mathbb{K}^I, 0 \in I$.
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ de partie régulière P, alors une primitive F de f admet un $\mathbf{DL}_{n+1}(0)$ de partie régulière la primitive de Q définie par $P(x) = f(0) + \int_0^x Q(t)dt$.

Preuve

- On a $f'(t) = Q(t) + \underset{t\to 0}{o}(t^n)$.
- i.e. $f'(t) = Q(t) + t^n \cdot \varepsilon(t)$ où $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ est telle que $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.
- Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t| < \eta \implies |\varepsilon(t)| < \varepsilon$.
- Soit $x \in I$, on a $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x Q(t)dt + \int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt$.
- Il faut maintenant montrer que $\int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$. Attention : t devient une variable muette, on utilise maintenant x.
- Soit $\varepsilon' > 0$. Comme $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta \implies |\varepsilon(x)| < \varepsilon'$.
- On sait aussi que $t \in [0, x]$ ou $[x, 0] \implies |t| \leq |x|$.
- Donc $|t| < \eta \implies |\varepsilon(t)| < \varepsilon'$.
- On a donc pu majorer l'intégrale suivante :

$$\left|\int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt\right| \leq \int_0^x |t|^n \cdot |\varepsilon(t)|\, dt \leq \varepsilon' \int_0^x |t|^n\, dt = \varepsilon' \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

- Donc $\left|\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt\right| \leq \frac{\varepsilon'}{n+1} < \varepsilon'$.
- Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt = 0$.
- i.e. $\int_0^x t^n \cdot \varepsilon(t)dt = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.
- Donc, $\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x Q(t)dt + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.
- Donc $f(x) = f(0) + \int_0^x Q(t)dt + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$. CQFD.

■

Exemple 2.2.3.9

- On cherche le développement limité d'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arctan.
  - On a $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
  - On connaît le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$:
  - $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)}_{\text{ou } \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \text{ sachant que} f \text{ est paire}}.$$

▷ D'où $\arctan(x) = \cancel{\arctan(0)} + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1} + \underbrace{\underset{t\to 0}{o}\left(t^{2n+1}\right)}_{\text{ou } \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \text{ sachant que} f \text{ est paire}} \right) dt.$

- On cherche le développement limité d'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arcsin.
  - ▷ On a $\forall x \in]-1,1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.
  - ▷ On connaît le développement limité d'ordre $2n$ en 0 de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$:
  - ▷ $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-x^2)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$
    $= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$
    $= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^{2k}}{4^k} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$.
  - ▷ Donc $\arcsin(x) = \cancel{\arcsin(0)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^{2k}}{4^k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$.

Remarque 2.2.3.6

On a f' admet un développement limité en 0 $\Longrightarrow$ f admet un développement limité en 0.
La réciproque est fausse : f admet un développement limité en 0 $\not\Longrightarrow$ f' admet un développement limité en 0.

Propriété 2.2.3.14

Soit $f \in \mathbb{K}^I, 0 \in I$ et f dérivable sur I.
Si f et f' admettent un $\mathbf{DL}_{n+1}(0)$ et $\mathbf{DL}_n(0)$ respectivement, de parties régulières P et Q, alors $P' = Q$.

Exemple 2.2.3.10

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, telle que :
$f(x) = 3x - x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
On a f' est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc f' admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier pour $n = 2$, avec :

$$f'(x) = 3 - 2x + 6x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

3 Applications

3.1 Calcul de limites

Exemple 3.3.1.11

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$.
On souhaite déterminer la limite de f en 0.

- On calcule le développement limité d'ordre 3 en 0 de $sin(x)$: $sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.
- On remplace dans f :
  - $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)\right)^2}$.
- On factorise par $\frac{1}{x^2}$:
  - $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right)^2}\right)$.
  - $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right)^{-2}\right)$.
- On calcule le développement limité d'ordre 2 en 0 de $(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2))^{-2}$.
  - On trouve $(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2))^{-2} = 1 + \frac{x^2}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$.
- On remplace dans f :
  - $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{x^2}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right)\right)$.
- On calcule ensuite la limite :
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right)$.
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{3} + \underset{x \to 0}{o}(1)\right)$.
  - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$.
- **Conclusion :** La limite de f en 0 est $-\frac{1}{3}$.

3.2 Recherche des équivalents

Exemple 3.3.2.12 *(Exemple concernant les fonctions)*

On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x - \sinh(x)}{x\cos(x) - \ln(1+x)}$$

On cherche un équivalent de f en 0.

Méthode

Pour déterminer un équivalent de cette fonction, on va d'abord déterminer un développement limité de son numérateur et de son dénominateur, puis on en déduira un équivalent (on cherche un autre quotient).

- On a $x - \sinh(x) = x - \left(x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
- Donc $x - \sinh(x) \sim_0 -\frac{x^3}{6}$.
- On a $x\cos(x) - \ln(1+x) = x(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) - \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
- Le degré de ce développement limité n'est pas adéquat pour trouver un équivalent. On calcule donc le développement limité d'ordre 1 de $x\cos(x)$ et d'ordre 2 pour $\ln(1+x)$.
- On a $x\cos(x) = x(1 + \underset{x\to 0}{o}(x)) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
- On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
- Donc $x\cos(x) - \ln(1+x) = \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
- On a donc déduit un équivalent de $x\cos(x) - \ln(1+x)$ en 0 : $x\cos(x) - \ln(1+x) \sim_0 \frac{x^2}{2}$.
- On en déduit un équivalent de f en 0 :

$$f(x) = \frac{x - \sinh(x)}{x\cos(x) - \ln(1+x)} \sim_0 \frac{-\frac{x^3}{6}}{\frac{x^2}{2}} = -\frac{x}{3}.$$

Exemple 3.3.2.13 *(Exemple concernant les suites)*

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par $U_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sin(U_n)$.

- On a $\forall x \in [0,1], 0 \leq \sin(x) \leq x$.
- Donc $(U_n)_n$ est une suite décroissante minorée par 0.

- Donc $(U_n)_n$ converge vers une limite $l \in [0,1]$. Cette limite vérifie $l = \sin(l)$.
- Donc $l = 0$.
- On cherche un équivalent de U_n.
- Soit $\alpha \neq 0$. On a ${U_{n+1}}^\alpha - {U_n}^\alpha = (\sin(U_n))^\alpha - {U_n}^\alpha$
$= U_n^\alpha(U_n - \frac{U_n^3}{6} + \underset{U_n \to +\infty}{o}(U_n^3)) - {U_n}^\alpha$
$= U_n^\alpha(1 - \alpha\frac{U_n^2}{6} + \underset{U_n \to +\infty}{o}(U_n^2) - 1)$.
- Donc ${U_{n+1}}^\alpha - {U_n}^\alpha = -\alpha\frac{U_n^{\alpha+2}}{6} + \underset{U_n \to +\infty}{o}(U_n^{\alpha+2})$.
- On choisit $\alpha = -2$.
- Donc ${U_{n+1}}^{-2} - {U_n}^{-2} = \frac{1}{3} + \underset{U_n \to +\infty}{o}(1)$.
- Donc $\frac{1}{U_{n+1}^2} - \frac{1}{U_n^2} \to \frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.
- Alors, d'après le théorème de Césàro, on a $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{U_{k+1}^2} - \frac{1}{U_k^2})\right) \to \frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.
- Donc, on a $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{U_n^2} - \frac{1}{U_0^2}\right) \to \frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.
- Or $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{U_0^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
- Donc, on a $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{U_n^2} \to \frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.
- Donc, on a $U_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Méthode

On peut généraliser la méthode utilisée ci-dessus pour déterminer un équivalent d'une suite définie par une relation de récurrence faisant intervenir une fonction admettant un développement limité.

Exercice 3.3.2.2

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par $U_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \ln(1 + U_n)$.

1. Montrer que $U_n \to 0$.
2. Donner un équivalent simple de $(U_n)_n$.

3.3 Recherche de la dérivabilité et de la position relative à la tangente

Exemple 3.3.3.14

On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1}$$

On cherche à étudier la dérivabilité de f en 0 et la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
On commence par calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de f. Pour ça, on calcule le développement limité d'ordre 5 en 0 du numérateur et du dénominateur, puis on simplifie par x^2 (c'est une fonction impaire).
Techniquement, l'ordre 1 est suffisant pour étudier la dérivabilité, mais on a besoin d'au minimum l'ordre 3 pour étudier la position relative à la tangente (pour cette fonction).

$$\begin{aligned}
\text{On a } f(x) &= \frac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh(x) - 1} \\
&= \dots \\
&= \frac{x + x^3/12 - x/3 - x^3/60 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{1 + x^2/12 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= \dots \\
&= \frac{2x}{3} - \frac{x^3}{90} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Comme f admet un $\mathbf{DL}_3(0)$, alors elle admet un $\mathbf{DL}_1(0)$, donc elle est prolongeable en une fonction dérivable en 0 (qu'on continuera à noter f) avec $f'(0) = \frac{2}{3}$.
L'équation de la tangente en 0 est donc $y = \frac{2}{3}x$.
Pour étudier la position relative de la courbe par rapport à sa tangente, on calcule $f(x) - \frac{2}{3}x$:

$$f(x) - \frac{2}{3}x = \frac{x^3}{90} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Donc, au voisinage de 0 à droite, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente, et au voisinage de 0 à gauche, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente.

3.4 Recherche d'asymptote

Si f admet un développement asymptotique de la forme $f(x) = ax + b + \frac{\alpha}{x^n} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$, avec $(a, b, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$.

(Δ) : $y = ax + b$ est donc dite asymptote de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ($\mathcal{V}(\pm\infty)$).

En plus, $f(x) - (ax + b) = \frac{\alpha}{x^n} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$, donc $f(x) - (ax + b) \sim_{\pm\infty} \frac{\alpha}{x^n}$.

Cela nous permet de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple 3.3.4.15

$$f : x \mapsto x \cdot \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On pose $t = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{t}$.
Donc $f(x) = f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t} \cdot \arctan\left(\frac{1/t}{1/t+1}\right) = \frac{1}{t} \cdot \arctan\left(\frac{1}{1+t}\right)$.
On va dériver $\arctan\left(\frac{1}{1+t}\right)$, faire son développement limité d'ordre 1 en 0, l'intégrer pour revenir à la variable t en ordre 2, puis revenir à la variable x.
Après calculs, on trouve que :

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \underset{t\to0}{o}(t).$$

D'où : $g(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \underset{t\to0}{o}(t^2)$.
D'où : $f(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \underset{t\to0}{o}(t)$.
Conclusion : $f(x) = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Fin du chapitre 9.

Dernier chapitre d'analyse de première année.